Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós Graduação em Matemática

Somas diretas e produtos tensoriais de representações

Inácio Augusto Rabelo Pinto

Grupos e Representações - MAT 889

28 de novembro de 2019

Conteúdo

Conteúdo

Notação

Seja G um grupo finito e F um corpo.

- V_1 e V_2 G-módulos sobre F.
- $\mathcal{B}_{V_1} = \{a_1, \ldots, a_m\}$ base de V_1 e $\mathcal{B}_{V_2} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ base de V_2.
- Representações respectivas:

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(V_1) \\ g &\longmapsto \rho_g \\ \rho_g : V_1 &\longrightarrow V_1 \\ a &\longmapsto ag \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sigma : G &\longrightarrow GL(V_2) \\ g &\longmapsto \sigma_g \\ \sigma_g : V_2 &\longrightarrow V_2 \\ b &\longmapsto bg \end{aligned}$$

- χ_ρ e χ_σ caracteres associados.

Conteúdo

Somas diretas

- Seja $V := V_1 \oplus V_2$.
- $\mathcal{B}_V = \{(a_1, 0), \ldots, (a_m, 0), (0, b_1), \ldots, (0, b_n)\}$

V é G-módulo

Defina

$$\begin{aligned} f : V \times G &\longrightarrow V \\ \big((a, b), g\big) &\longmapsto (ag, bg) \end{aligned}$$

Onde $a \in V_1$, $b \in V_2$ e $g \in G$.

Representação de V

$$\begin{aligned} \tau : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto \tau_g := \rho_g \oplus \sigma_g \\ \tau_g : V &\longrightarrow V \\ (a,b) &\longmapsto a\rho_g \oplus b\sigma_g = (a\rho_g, b\sigma_g) \end{aligned}$$

Onde $a \in V_1$, $b \in V_2$ e $g \in G$.

- τ_g é linear e $(\tau_g)^{-1} = \tau_{g^{-1}}$. Então, $\tau_g \in GL(V)$.
- τ é homomorfismo.
- A ação induzida é f.

Denotamos $\tau = \rho \oplus \sigma$.

A matriz de τ_g na base $\mathcal{B}_V$ é:

$$\begin{pmatrix} \left(\rho_g\right)_{m\times m} & 0 \\ 0 & \left(\sigma_g\right)_{n\times n} \end{pmatrix}_{(m+n)\times(m+n)}$$

Temos que $tr(\tau_g) = tr(\rho_g) + tr(\sigma_g)$. Então:

$$\chi_\tau = \chi_\rho + \chi_\sigma$$

Conteúdo

Produtos tensoriais

Definição

Sejam V_1 e V_2 F-espaços vetoriais. Um F-espaço vetorial V munido de uma aplicação $\xi : V_1 \times V_2 \longmapsto V$ é o produto tensorial de V_1 e V_2 se:

- ξ é bilinear.
- O conjunto $\mathcal{B}_V = \{\xi(a_i, b_j), a_i \in \mathcal{B}_{V_1}, b_j \in \mathcal{B}_{V_2}\}$ é uma base de V.

Denotamos $\xi(a,b) := a \otimes b$ e $V = V_1 \otimes V_2$.

Propriedades

- Existe e é único a menos de isomorfismo.
- $dim(V) = dim(V_1).dim(V_2)$.
- $V_1 \otimes V_2 \simeq V_2 \otimes V_1$
- $V_1 \otimes F \simeq V_1$
- $F^m \otimes F^n \simeq F^{mn}$

Conteúdo

Produtos Tensoriais

- Seja $V := V_1 \otimes V_2$.
- $\mathcal{B}_V = \{a_i \otimes b_j, a_i \in \mathcal{B}_{V_1}, b_j \in \mathcal{B}_{V_2}\}$

V é G-módulo

Defina

$$\begin{aligned} f : V \times G &\longrightarrow V \\ \Big(\sum_{i,j} \alpha_{ij}\big((a_i \otimes b_j), g\big)\Big) &\longmapsto \sum_{i,j} \alpha_{ij}(a_i g \otimes b_j g) \end{aligned}$$

Onde $a_i \in \mathcal{B}_{V_1}$, $b_j \in \mathcal{B}_{V_2}$, $g \in G$ e $\alpha_{ij} \in F$.

Representação de V

$$\begin{aligned} \tau : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto \tau_g := \rho_g \otimes \sigma_g \\ \tau_g : V &\longrightarrow V \\ \sum_{i,j} \alpha_{ij}(a_i \otimes b_j) &\longmapsto \sum_{i,j} \alpha_{ij}(a_i\rho_g \otimes b_j\sigma_g) \end{aligned}$$

Onde $a \in V_1$, $b \in V_2$, $g \in G$ e $\alpha_{ij} \in F$.

- τ_g é linear e $(\tau_g)^{-1} = \tau_{g^{-1}}$. Então, $\tau_g \in GL(V)$.
- τ é homomorfismo.
- A ação induzida é f.

Denotamos $\tau = \rho \otimes \sigma$.

A matriz de τ_g na base $\mathcal{B}_V$ é:

$$\begin{pmatrix} (\rho_g)_{11}\left(\sigma_g\right) & \cdots & (\rho_g)_{1n}\left(\sigma_g\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\rho_g)_{n1}\left(\sigma_g\right) & \cdots & (\rho_g)_{nn}\left(\sigma_g\right) \end{pmatrix}_{(mn)\times(mn)}$$

Temos que $tr(\tau_g) = tr(\rho_g).tr(\sigma_g)$. Então:

$$\chi_\tau = \chi_\rho.\chi\sigma$$

Proposição

Seja F um corpo e G um grupo finito.

1. Somas de F-caracteres são F-caracteres.
2. Produtos de F-caracteres são F-caracteres.
3. O conjunto Ω das combinações lineares inteiras de F-caracteres é um anel comutativo.

Proposição

Seja F um corpo e G um grupo finito.

1. Somas de F-caracteres são F-caracteres.
2. Produtos de F-caracteres são F-caracteres.
3. O conjunto Ω das combinações lineares inteiras de F-caracteres é um anel comutativo.

Demonstração:

1. $\chi_\rho + \chi_\sigma$ é F-caracter de $\tau = \rho \oplus \sigma$ e do módulo $V = V_1 \oplus V_2$.
2. $\chi_\rho . \chi_\sigma$ é F-caracter de $\tau = \rho \otimes \sigma$ e do módulo $V = V_1 \otimes V_2$.
3. É suficiente notar que $(F, +)$ é abeliano, $(F, .)$ é comutativo e associativo e produto de caracteres é caracter.

Aplicação

Observação 1: Um elemento de Ω é dito um caracter generalizado.
Observação 2: Assumimos a partir daqui $F = \mathbb{C}$.

Lema

Sejam χ_1 e χ_2 caracteres de duas representações irredutíveis não equivalentes. Então $<\chi_1,\chi_2>= 0$ e $<\chi_1,\chi_1>= 1$.

Teorema

Suponha V um G-módulo com caracter f e decomposição $V = \bigoplus_j V_j$, onde V_j é irredutível para todo j. Se W_i é uma representação irredutível com caracter χ_i, então o número de V_j's isomorfos a W_i é dado pelo produto escalar $<f,\chi_i>$.

Proposição

Suponha $\{\chi_i\}_{i=1}^{s}$ o conjunto completo de representações irredutíveis e não equivalentes de G. Uma função de classe $f = \sum_{i=1}^{s} \chi_i k_i$ é um F-caracter se, e somente se, k_i é um inteiro não negativo para todo i.

Proposição

Suponha $\{\chi_i\}_{i=1}^{s}$ o conjunto completo de representações irredutíveis e não equivalentes de G. Uma função de classe $f = \sum_{i=1}^{s} \chi_i k_i$ é um F-caracter se, e somente se, k_i é um inteiro não negativo para todo i.

Demonstração:

- Se k_i é inteiro não negativo, pela proposição anterior, f é caracter.
- Suponha f caracter e V o G-módulo associado.
- Pelo teorema de Maschke, $V = \bigoplus_j V_j$ com V_j irredutível para todo j.
- Suponha W_i caracter associado a χ_i.
- Pelo Teorema anterior, $< f, \chi_i >$ é o número de V_j's isomorfos a W_i.
- Então k_i é um inteiro não negativo.

Conteúdo

Exemplos: $G = D_4$

Considere o grupo diedral:

$$D_4 = \{r, s : r^4 = 1, s^2 = 1, srs = r^{-1}\}$$

- 4 representações irredutíveis de dimensão 1.
- Suponha $\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ homomorfismo.
- Temos que $\rho(s)^2 = 1$ e $\rho(s)\rho(r)\rho(s) = \rho(r) = \rho(r)^{-1}$.
- Então $\rho(r), \rho(s) \in \{\pm 1\}$.

Exemplo 1

Considere as representações:

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ r &\longmapsto +1 \\ s &\longmapsto -1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \sigma : G &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ r &\longmapsto -1 \\ s &\longmapsto -1 \end{aligned}$$

$\tau = \rho \oplus \sigma$ é representação de $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^2$.

$$(\tau_r) = \begin{pmatrix} +1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2} \qquad\qquad (\tau_s) = \begin{pmatrix} -1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Exemplo 2

Considere as representações:

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ r &\longmapsto -1 \\ s &\longmapsto -1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \sigma : G &\longrightarrow GL(\mathbb{C}^2) \\ r &\longmapsto Rot(\pi/2) \\ s &\longmapsto Ref(\pi) \end{aligned}$$

$\tau = \rho \oplus \sigma$ é representação de $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{C}^3$.

$$(\tau_r) = \begin{pmatrix} -1 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & -1 \\ 0 & \vdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \qquad (\tau_s) = \begin{pmatrix} -1 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Exemplo 3

Considere as representações:

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ r &\longmapsto +1 \\ s &\longmapsto +1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \sigma : G &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ r &\longmapsto -1 \\ s &\longmapsto +1 \end{aligned}$$

$\tau = \rho \otimes \sigma$ é representação de $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$. Ou seja, é outra representação irredutível.

$$(\tau_r) = (+1. - 1) = (-1) \qquad (\tau_s) = (+1. + 1) = (+1)$$

Exemplo 4

Considere a seguinte representação de dimensão 2:

$$\begin{aligned} \sigma : G &\longrightarrow GL(\mathbb{C}^2) \\ r &\longmapsto Rot(\pi/2) \\ s &\longmapsto Ref(\pi) \end{aligned}$$

$\tau = \rho \otimes \rho$ é representação de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{C}^{2.2} = \mathbb{C}^4$.

$$(\tau_r) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 4} \qquad (\tau_s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 4}$$

Referências

[1] D. J. S. Robinson, *A course in the theory of groups*. 2nd ed. Springer, 1996.

[2] J.P Serre, *Linear representations of Finite groups*. Ed. Springer, 1977.