Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso: Grupos e Representações (MAT 889)

Professor: Csaba Schneider

Representações Induzidas

Júlio César Magalhães Marques

Dezembro 2019

Os resultados aqui apresentados foram retirados do livro *A course in theory of groups - Derek Robinson*, [1]. Sendo assim, para detalhes sobre notação e resultados preliminares utilizados vide referência.

Suponha G um grupo finito, $H \leqslant G$ um subgrupo e F um corpo. Se $\rho : G \to GL(V)$ é uma F-representação de G, onde V é um FG-módulo, podemos restringir $\rho_{|_H} : H \to GL(V)$ a fim de obter uma representação para H. O problema menos trivial surge quando deseja-se fazer o caminho contrário, isto é, construir uma representação para G a partir de uma representação de H. Isto conduz ao importante conceito de **representação induzida**, dado por Frobenius.

Suponha H subgrupo de G com indice finito r. Seja ρ uma F-representação de H proveniente de um FH-módulo à direita M. Procedemos agora com o produto tensorial sobre FH,

$$M^G := M \otimes_{FH} FG,$$

onde FG é visto como FH-módulo à esquerda. Sendo assim M^G é apenas um F-módulo. Contudo, FG é também FG-módulo por multiplicação à direita, logo M^G é FG-módulo pela seguinte regra:

$$\begin{array}{rcl} (M^G, FG) & \longrightarrow & M^G \\ (a \otimes b, f) & \longmapsto & (a \otimes b)f = a \otimes (bf) \end{array}$$

Como o produto tensorial é bilinear a ação fica bem definida. O módulo M^G é chamado **módulo induzido** de M e a F-representação proveniente de M^G é chamada **representação induzida** de ρ, denotada por ρ^G. Se ρ tem caracter χ, denotamos por χ^G o **caracter induzido**, isto é, o caracter de ρ^G.

Passamos agora a análise da natureza do módulo M^G. Seja $\{t_1, \ldots, t_r\}$ um transversal à direta de H em G, isto é, um conjunto de representantes das classes laterais à direita de H em G. Como $G = \bigcup_i Ht_i$ podemos escrever cada elemento de FG de forma única como

$$\sum_{i=1}^{r} u_i t_i, \ u_i \in FH$$

Consequentemente produzimos em FG uma decomposição em FH-módulos: $FG = (FH)t_1 \oplus \cdots \oplus (FH)t_r$. Utilizando a distributividade do produto tensorial temos o seguinte isomorfismo

$$M^G \simeq M \otimes_{FH} ((FH)t_1) \oplus \cdots \oplus M \otimes_{FH} ((FH)t_r)$$

Em se tratando de produto tensorial temos que $a \otimes ut_i = au \otimes t_i$ para $u \in FH$, logo

$$M^G \simeq M \otimes_{FH} t_1 \oplus \cdots \oplus M \otimes_{FH} t_r$$

Assim, considerando $\{a_1, \ldots, a_n\}$ base de M sobre F, os elementos $a_i \otimes t_j$ com $i = 1, 2, \ldots, n, \ j = 1, 2, \ldots, r$ formam uma base para M^G sobre F. Logo

$$\text{degree } \rho^G = (\text{degree } \rho) \cdot |G : H| = nr$$

Agora vejamos como calcular o valor do caracter da representação induzida.

Teorema 1. *Seja G um grupo finito, H um subgrupo de G e F um corpo cuja caracteristica não divide a ordem de H. Se χ é um F-caracter de H, o valor do caracter induzido é dado por*

$$(g)\chi^G = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} (xgx^{-1})\chi$$

onde fica subentedido que χ é zero em $G \backslash H$.

Demonstração Seja ρ uma F-representação de H com caracter χ. Escolha $\{a_1, \ldots, a_n\}$ base do FH-módulo M proveniente da representação ρ e considere $\{t_1, \ldots, t_r\}$ um transversal à direita para H em G. Vimos que $a_i \otimes t_j$ forma uma base para M^G. Se $g \in G$, então $t_j g = xt_k$

para algum k e $x = t_j g t_k^{-1} \in H$. Daí

$$(a_i \otimes t_j)g = a_i \otimes (t_j g) = a_i \otimes (x t_k) = (a_i x) \otimes t_k$$

Como $((g)\rho_{ij})$ representa a (i, j) entrada da matrix g^{ρ^*} temos que a imagem de a_i pela ação de x é dada por $\sum_{l=1}^{n}(x)\rho_{il}a_l$, daí

$$(a_i \otimes t_k)g = \left(\sum_{l=1}^{n}(x)\rho_{il}a_l\right) \otimes t_k = \sum_{l=1}^{n}(x)\rho_{il}(a_l \otimes t_k) = \sum_{l=1}^{n}(t_j g t_k^{-1})\rho_{il}(a_l \otimes t_k)$$

Sabendo que as classes laterais formam uma partição de G, dados j e g existe precisamente um k tal que $t_j g t_k^{-1} \in H$. Assim, com a convenção de que ρ_{il} é zero em $G\backslash H$, tem-se

$$(a_i \otimes t_k)g = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}(t_j g t_k^{-1})\rho_{il}(a_l \otimes t_k)$$

Isso estabelece que a matriz representando g^{ρ^G} possui o valor $(t_j g t_k^{-1})\rho_{il}$ na entrada $(i, j : l, k)$. Logo podemos calcular o caracter χ^G.

$$(g)\chi^G = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}(t_j g t_j^{-1})\rho_{ii} = \sum_{j=1}^{r}(t_j g t_j^{-1})\chi$$

Note que para $z \in H$, temos

$$(z t_j g (z t_j)^{-1})\chi = (z(t_j g t_j^{-1})z^{-1})\chi = (t_j g t_j^{-1})\chi$$

pois χ é função de classe, portanto constante nas classes de conjugação. Sendo assim, ao tomarmos elementos em G pertencentes a mesma classe lateral estes terão mesmo caracter. Como cada classe lateral possui $|H|$ elementos, temos

$$(g)\chi^G = \frac{1}{|H|}\sum_{x \in G}(x g x^{-1})\chi$$

$\square$

O próximo resultado é utilizado com frequência nos cálculos de caracteres induzidos.

Teorema 2 (Reciprocidade de Frobenius)**.** *Seja G um grupo finito e F um corpo cuja característica não divide a ordem de G. Assuma que H é subgrupo de G e que ψ e χ são*

F-caracteres de H e G, respectivamente. Então

$$\langle \psi^G, \chi \rangle_G = \langle \psi, \chi_H \rangle_H$$

onde χ_H denota a restrição de χ à H.

Demonstração Seja $|H| = l$ e $|G| = m$, aplicando a forma simétrica bilinear temos:

$$\begin{aligned}
\langle \psi^G, \chi \rangle_G &= \frac{1}{m} \sum_{x \in G} (x)\psi^G(x^{-1})\chi \\
&= \frac{1}{m} \sum_{x \in G} \left(\frac{1}{l} \sum_{y \in G} (yxy^{-1})\psi \right) (x^{-1})\chi \\
&= \frac{1}{lm} \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} (yxy^{-1})\psi(x^{-1})\chi
\end{aligned}$$

Como χ é função de classe $(x^{-1})\chi = (yx^{-1}y^{-1})\chi$, logo

$$\begin{aligned}
\langle \psi^G, \chi \rangle_G &= \frac{1}{lm} \sum_{y \in G} \sum_{x \in G} (yxy^{-1})\psi(yx^{-1}y^{-1})\chi \\
&= \frac{1}{lm} \sum_{y \in G} \sum_{z \in G} (z)\psi(z^{-1})\chi \\
&= \frac{1}{l} \sum_{z \in G} (z)\psi(z^{-1})\chi
\end{aligned}$$

Recorde que convencionamos que ψ se anula em $G \backslash H$, logo a soma feita para $z \in G$ pode ser restringida à H, donde obtemos

$$\langle \psi^G, \chi \rangle_G = \frac{1}{l} \sum_{z \in H} (z)\psi(z^{-1})\chi_H = \langle \psi, \chi_H \rangle_H.$$

$\square$

References

[1] D. J. S. Robinson, *A course in the theory of groups.* 2nd ed. Springer, 1996.