Representação Monomial *

Vanderlei Lopes de Jesus †

5 de dezembro de 2019

1 Resultados Auxiliares

O Objetivo principal desse trabalho é provar o Teorema de Blichfeldt:

Teorema 1 (Blichfeldt) *Seja G um grupo finito, $\mathbb{F}$ um corpo algebricamente fechado e M um $\mathbb{F}G$-módulo simples que proporciona uma representação fiel de G. Suponha que G possui um subgrupo normal abeliano A com $A \nsubseteq Z(G)$. Então, existe um subgrupo próprio $H < G$ e um $\mathbb{F}H$-módulo simples N tal que M e N^G são $\mathbb{F}G$-isomorfos.*

Esse teorema apresenta a condição necessária para isomorfismos de módulos induzidos por um subgrupo $H < G$ e $\mathbb{F}G$-módulos simples de um grupo finito G. Para tanto vamos precisar dos seguintes resultados, bem conhecidos e importantes de teoria de representações de grupos: O Lema de Schur e o Teorema de Clifford.

Teorema 2 (Lema de Schur) *Sejam U e V dois $\mathbb{F}G$-módulos simples e $\varphi : U \to V$ um G-homomorfismo. Então $\varphi = 0$ ou φ é um isomorfismo.*

Como consequência do Lema de Schur temos o corolário:

Corolário 3 *Seja G um grupo finito abeliano, $\mathbb{F}$ um corpo algebricamente fechado, e V um $\mathbb{F}G$-módulo simples de dimensão finita. Então $dim_{\mathbb{F}}V = 1$.*

Teorema 4 (Clifford) *Seja G um grupo finito, V um $\mathbb{F}G$-módulo simples de dimensão finita, $N \trianglelefteq G$ e $U \leq_N V$ um N-submódulo simples. Então,*

1. *$V = \sum_{g \in G} Ug$, onde Ug é um N-módulo simples e V é completamente redutível.*
2. *Sejam $S_1, \ldots, S_k$ os tipos de isomorfismo dos N-submódulos simples de V e seja para $i \in \{1, \ldots, k\}$, $V_i = \sum W$ onde $W \leq_N V$ e $W \cong S_i$. Então $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ como N-módulo.*
3. *G age transitivamente no conjunto $\{V_1, \ldots, V_k\}$.*
4. *Seja $G_i = G_{V_i}$ (o estabilizador). Então V_i é um $\mathbb{F}G_i$-módulo simples.*

---

*Trabalho realizado como parte da avalição da disciplina *Grupos e Representações* sob regência do Professor Csaba Schneider.

†Email: vanderleilopesbh@gmail.com. Doutorado em Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais

2 Representação Monomial

Definição 5 *Sejam G um grupo, $\mathbb{F}$ um corpo e M um $\mathbb{F}$-espaço vetorial. Dizemos que uma representação $\rho : G \to GL(M)$ é uma representação monomial se $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$, onde ρ_i é induzida por uma representação de grau 1 de um subgrupo H de G.*

Para visualizar uma representação monomial precisamos examinar a sua representação matricial associada. Suponha que $\rho : G \to GL(M)$ é uma representação monomial de G, $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$ e $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$, onde ρ_i corresponde ao $\mathbb{F}G$-módulo á direita M_i. Então, pode definição de representação monomial, temos para cada $1 \leq i \leq k$ que $M_i = N_i^G$, onde N_i é um $\mathbb{F}H_i$-módulo de dimensão 1, para H_i um subgrupo de G. Digamos, $N_i = \mathbb{F}a_i$. Escolhendo $\{t_1^{(i)}, \ldots, t_{r_i}^{(i)}\}$ uma transversal de H_i em G, segue que $\{a_i \otimes t_j^{(i)} \ : \ 1 \leq j \leq r_i\}$ é uma base para M_i como $\mathbb{F}G$-módulo à direita.

Vamos ver a ação de cada $g \in G$ nos elementos da base de M_i construída acima: primeiro note que que $t_j^{(i)} g = ht_k^{(i)}$ para únicos $h \in H_i$ e $k > 1$ inteiro. Também observe que $a_i h = C_{i,j}^{(g)} a_i$ com $C_{i,j}^{(g)} \in \mathbb{F}$ não nulo, pois $N_i = \mathbb{F}a_i$. Logo,

$$\begin{aligned}\big(a_i \otimes t_j^{(i)}\big)g &= a_i \otimes t_j^{(i)} g = a_i \otimes ht_k^{(i)} = a_i h \otimes t_k^{(i)} \\ &= C_{i,j}^{(g)} a_i \otimes t_k^{(i)} = C_{i,j}^{(g)}\big(a_i \otimes t_k^{(i)}\big).\end{aligned}$$

Assim a matriz representando $g\rho$ com respeito a base de todos $a_i \otimes t_j^{(i)}$ tem sua entrada $(i, j : i, k)$ igual a $C_{i,j}^{(g)}$ e todas as outras zero. portanto $g\rho^*$ tem precisamente um elemento não nulo em cada linha e em cada coluna (uma matriz com essa propriedade é chamada matriz monomial).

Representações monomiais definem os chamados M-grupos. Um grupo finito G é dito M-grupo se, sempre que $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado e $char\mathbb{F} \nmid |G|$, então toda representação de G é monomial. Pelo teorema de Maschke um grupo G é M-grupo se, e somente se, todas as representações irredutíveis de G são monomiais. Assim, veja que grupos finitos abelianos são M-grupos.

Sejam G um grupo, $\mathbb{F}$ um corpo e M um $\mathbb{F}$-espaço vetorial. Se $M \cong N^G$ para N um $\mathbb{F}H$-módulo de dimensão 1 para algum subgrupo H de G, então dizemos que M é monomial. Em particular, todo $\mathbb{F}G$-módulo de dimensão 1 é monomial.

Teorema 6 (Blichfeldt) *Seja G um grupo finito, $\mathbb{F}$ um corpo algebricamente fechado e M um $\mathbb{F}G$-módulo simples que proporciona uma representação fiel de G. Suponha que G possui um subgrupo normal abeliano A com $A \nsubseteq Z(G)$. Então, existe um subgrupo próprio $H < G$ e um $\mathbb{F}H$-módulo simples N tal que M e N^G são $\mathbb{F}G$-isomorfos.*

Prova: Primeiro, por 2 e 3 do Teorema 4 podemos escrever $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$, onde M_i é uma soma de $\mathbb{F}A$-módulos simples isomorfos e G age transitivamente em $\Omega = \{M_1, \ldots, M_k\}$. Ainda, pelo Corolário 3 a ação de A em M_i é escalar.

Afirmamos que $k > 1$. Com efeito, se $k = 1$ então $M = M_1$ e afirmamos que $A \subseteq Z(G)$. De fato, G age transitivamente em M e como a ação de A em M é escalar, temos que para quaisquer $m \in M, \ a \in A \ $ e $\ g \in G$

$$m(ag) = (ma)g = (m\lambda_a)g = (mg)\lambda_a = m(ga),$$

onde $\lambda_a \in \mathbb{F}$. Logo, $m(aga^{-1}g^{-1}) = m$ donde $aga^{-1}g^{-1} = 1$, isto é, $ag = ga$. Logo $A \subseteq Z(G)$ que é uma contradição com a hipótese. Portanto $k > 1$.

Seja $N = M_1$ e defina $H = G_N = \{g \in G \ : \ Ng = N\}$ o estabilizador de N em G. Como G age transitivamente em Ω temos que $[G : G_N] = k > 1$ e por 4 do Teorema 4 segue que N é $\mathbb{F}H$-módulo simples. Por transitividade $M_i = Ng_i$ para algum $g_i \in G$ e $\{g_1, \ldots, g_k\}$ é uma transversal direita de H em G.

Se $a_i \in N$, então

$$\varphi : N^G \to M, \ \sum_i a_i \otimes g_i \mapsto \sum_i a_i g_i,$$

é o $\mathbb{F}G$-isomorfismo desejado.

Referências

[1] Derek J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*. Springer-Verlang, New York, 1996.